Beweise mit Skalarprodukt

eine GFS in Fach Mathematik von Jonathan Meier

29. November 2005

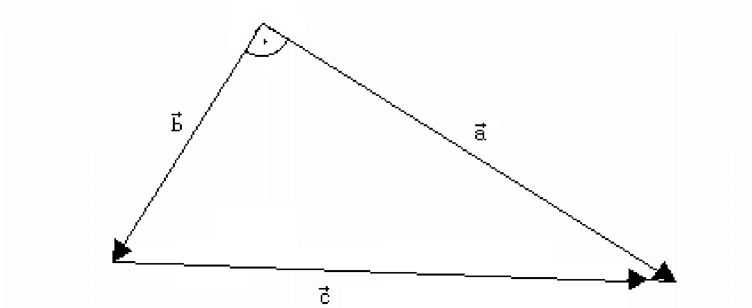
1 Idee des Beweises mit Skalarprodukt

Mithilfe des Skalarproduktes kann Orthogonalität nachgewiesen werden.

Die Beweiskette, am Beispiel folgender, einfacher Aufgabe:

Beweise den Satz des Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$ in rechtwinkligen Dreiecken)

1. Erstellen einer Skizze, dabei Bezeichnung der Seiten durch Vektoren

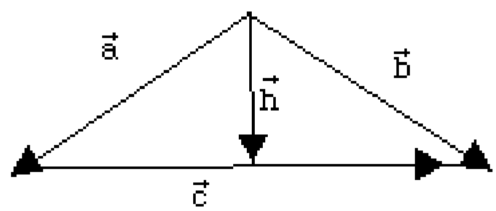


2. Beschreibung der gegebenen Voraussetzungen durch Vektoren
   (a) $\vec{a} \perp \vec{b}$ also $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, da Dreieck rechtwinklig
   (b) $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
3. Beschreibung der Behauptung durch Vektoren
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$ (gleichwertig zu $a^2 + b^2 = c^2$)
4. Beweis
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{c}^2$ | Voraussetzung (b) nutzen
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2$ | binomische Formel anwenden
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$ | Voraussetzung (a) nutzen
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 - 0 + \vec{b}^2$
   $\vec{a}^2 + \vec{b}^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2$ | Behauptung ist wahr $\Rightarrow$ q.e.d.

2 Erster Beweis

Beweise: In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Seitenhalbierende der Grundseite und die Grundseite selbst zueinander orthogonal. (S.107, Aufgabe 3)[1]

1. Skizze



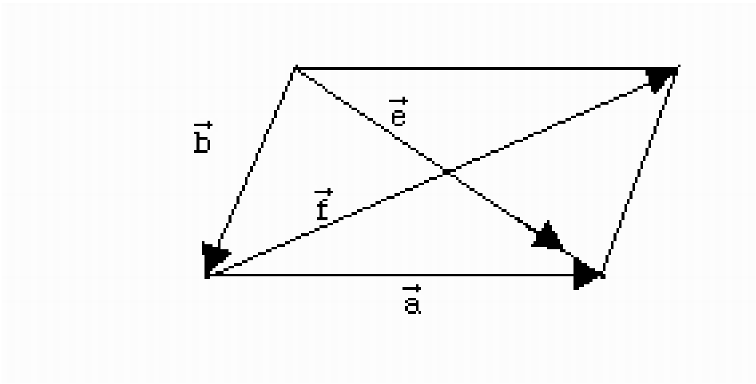
2. Voraussetzungen
   (a) $\vec{a}^2 = \vec{b}^2$, da Dreieck gleichschenklig
   (b) $\vec{c} = \vec{b} - \vec{a}$
   (c) $\vec{h} = \vec{a} + \frac{\vec{c}}{2} = \vec{b} - \frac{\vec{c}}{2}$
3. Behauptung
   $\vec{h} \perp \vec{c}$ also $\vec{h} \cdot \vec{c} = 0$
4. Beweis durch Rückschluss
   $\vec{h} \cdot \vec{c} = 0 \mid$ Voraussetzungen (b) und (c) nutzen
   $(\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) = 0 \mid$ ausmultiplizieren
   $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \frac{\vec{c}}{2}\vec{b} - \frac{\vec{c}}{2}\vec{a} = 0 \mid$ Voraussetzung (b) nutzen
   $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2} \cdot \vec{a} = 0$
   $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{2} - \frac{\vec{a}}{2}\vec{b} - \frac{\vec{a}}{2}\vec{b} + \frac{\vec{a}^2}{2} = 0$
   $\vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{2} + \frac{\vec{a}^2}{2} = 0$
   $-\vec{a}^2 + \frac{\vec{b}^2}{2} + \frac{\vec{a}^2}{2} = 0 \mid$ Voraussetzung (a) nutzen $\Rightarrow \frac{\vec{b}^2}{2} = \frac{\vec{a}^2}{2}$
   $-\vec{a}^2 + \vec{a}^2 = 0$
   $0 = 0 \mid$ Rückschluss $\Rightarrow$ Behauptung ist wahr $\Rightarrow$ q.e.d.

[1] alle Seitenangaben beziehen sich auf: Lambacher Schweizer, Analytische Geometrie mit linearer Algebra, Grundkurs, Ernst Klett Verlag, 1998

3 Zweiter Beweis

Beweise: Für jedes Parallelogramm gilt: Die Quadrate der vier Seiten haben zusammen den gleichen Flächeninhalt wie die Quadate der beiden Diagonalen. (S.108, Aufgabe 7)

1. Skizze



2. Voraussetzungen
   (a) $\vec{e} = \vec{a} + \vec{b}$
   (b) $\vec{f} = \vec{a} - \vec{b}$

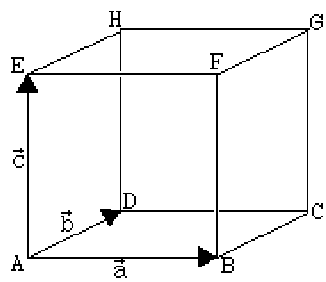
3. Behauptung
   $2 \cdot \vec{a}^2 + 2 \cdot \vec{b}^2 = \vec{e}^2 + \vec{f}^2$

4. Beweis durch Rückschluss
   $2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = \vec{e}^2 + \vec{f}^2$ | Voraussetzungen eingesetzen
   $2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2$ | binomische Formel anwenden
   $2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
   $2\vec{a}^2 + 2\vec{b}^2 = 2\vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$ | $-2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2$
   $0 = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
   $0 = 0$ | Rückschluss $\Rightarrow$ Behauptung ist wahr $\Rightarrow$ q.e.d.

4 Dritter Beweis

Überprüfe: Die Raumdiagonalen AG und BH des Würfels ABCDEFGH sind zueinander orthogonal. (S.107, Aufgabe 4)

1. Skizze

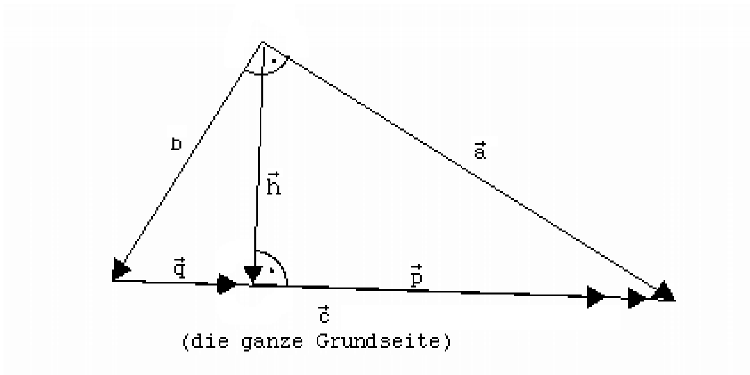


2. Voraussetzungen
   (a) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$ also $\vec{a}^2 = \vec{b}^2 = \vec{c}^2$, da alle Seiten gleich lang
   (b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$, da Seiten rechtwinklig aufeinander stehen
   (c) $\vec{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ bzw. $\vec{BH} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$
3. Behauptung
   $\vec{AG} \perp \vec{BH}$ also $\vec{AG} \cdot \vec{BH} = 0$
4. Beweis durch Rückschluss
   $\vec{AG} \cdot \vec{BH} = 0$ | Voraussetzung (c) nutzten
   $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = 0$ | ausmultiplizieren
   $-\vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c}^2 = 0$ | Voraussetzung (b) nutzten
   $-\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 = 0$ | Voraussetzung (a) nutzen
   $\vec{c}^2 = 0$ | Widerspruch $\Rightarrow$ Behauptung ist falsch $\Rightarrow$ q.e.d.

5 Vierter Beweis

Beweise: In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat einer Kathete so groß wie das der aus der Hypotenuse und dem entsprechenden Hypothenusenabschnitt (Kathetensatz) (S.108, Aufgabe 6)

1. Skizze



2. Voraussetzungen
   (a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{h} \cdot \vec{q} = \vec{h} \cdot \vec{p} = 0$
   (b) $\vec{p} + \vec{q} = \vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$
   (c) $\vec{q} + \vec{b} = \vec{h} = \vec{a} - \vec{p}$
3. Behauptung
   $\vec{a}^2 = \vec{c} \cdot \vec{p}$ bzw. $\vec{b}^2 = \vec{c} \cdot \vec{q}$
4. direkter Beweis
   $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ | Voraussetzungen (b) und (c) nutzten
   $\vec{a}^2 = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{h} + \vec{p})$ | ausmultiplizieren
   $\vec{a}^2 = \vec{b} \cdot \vec{h} + \vec{b} \cdot \vec{p} + \vec{c} \cdot \vec{h} + \vec{c} \cdot \vec{p}$ | $\vec{b}$ ausklammern
   $\vec{a}^2 = \vec{b} \cdot (\vec{h} + \vec{p}) + \vec{c} \cdot \vec{h} + \vec{c} \cdot \vec{p}$ | Voraussetzung (c) nutzen
   $\vec{a}^2 = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{c} \cdot \vec{h} + \vec{c} \cdot \vec{p}$ | Voraussetzung (a) nutzen
   $\vec{a}^2 = 0 + 0 + \vec{c} \cdot \vec{p}$
   $\vec{a}^2 = \vec{c} \cdot \vec{p}$
   $\vec{c}$ ist parallel zu $\vec{p}$, damit ist das Produkt seiner Vektoren ein Produkt seiner Beträge ⇒ Behauptung ist wahr ⇒ q.e.d.